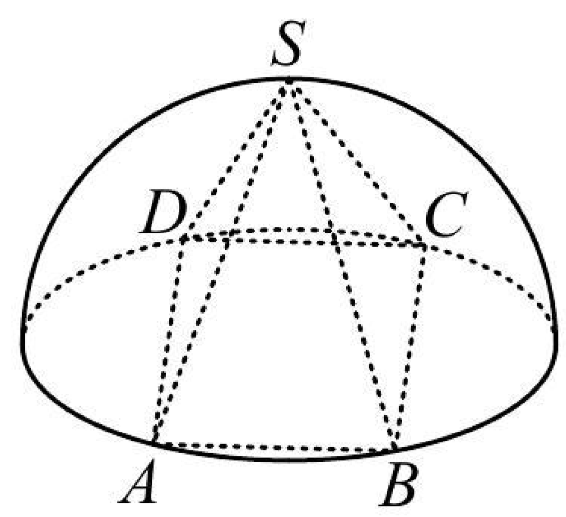
第 2 节 规则几何体的结构计算（★★★）

强化训练

类型 I：规则几何体计算

1.（2023 • 天津模拟 • ★★）如图，半球内有一内接正四棱锥 $S-ABCD$，该四棱锥的体积为 $\frac{4\sqrt{2}}{3}$，则该半球的体积为（　　）

（A）$\frac{\sqrt{2}}{3}\pi$　　（B）$\frac{4\sqrt{2}}{9}\pi$　　（C）$\frac{4\sqrt{2}}{3}\pi$　　（D）$\frac{8\sqrt{2}}{3}\pi$

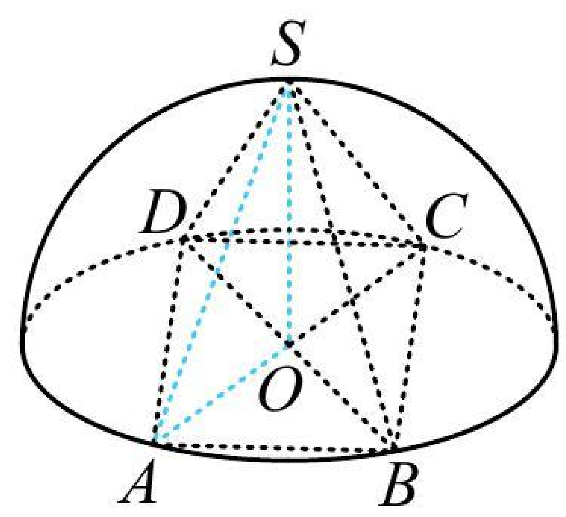


答案：C

解析：涉及正四棱锥，先作高，由于要算球的半径，故分析包含高 SO 和半径 OA 的截面 SOA，

如图，设球的半径为 R，则 $SO=OA=R$，$AB=\sqrt{2}R$，正四棱锥的体积 $V=\frac{1}{3}\times(\sqrt{2}R)^2\times R=\frac{4\sqrt{2}}{3}$，

所以 $R=\sqrt{2}$，故半球的体积为 $\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4\sqrt{2}}{3}\pi$.



2.（2023 • 全国乙卷 • ★★★）已知圆锥 PO 的底面半径为 $\sqrt{3}$，O 为底面圆心，PA，PB 为圆锥的母线，$\angle AOB=120^{\circ}$，若 ΔPAB 的面积等于 $\frac{9\sqrt{3}}{4}$，则该圆锥的体积为（　　）

（A）π　　（B）$\sqrt{6}\pi$　　（C）3π　　（D）$3\sqrt{6}\pi$

答案：B

解析：先翻译条件中的 $S_{\Delta PAB}$，由于不知道角，所以用“$\frac{1}{2}\times$底$\times$高”，AB 在 ΔAOB 中好求，故若以 AB 为底，则可求出高 PQ，接下来方向就明确了，只需研究高 PQ 所在的截面，

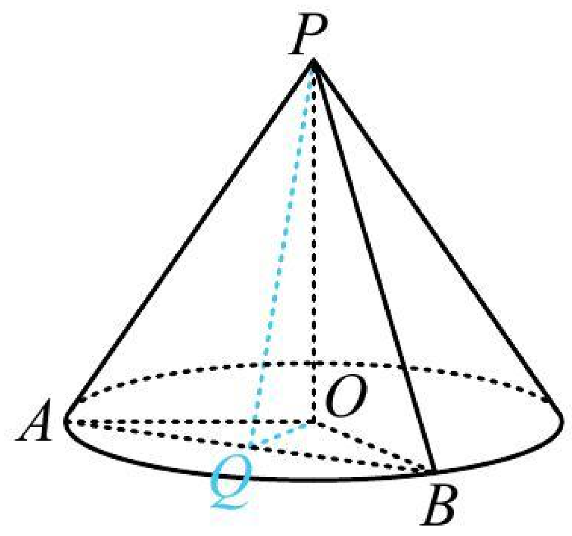
在 ΔAOB 中，由余弦定理，$AB^2=OA^2+OB^2-2OA\cdot OB\cdot\cos\angle AOB=9$，所以 $AB=3$，

取 AB 中点 Q，连接 PQ，OQ，则 $OQ\perp AB$，$PQ\perp AB$，

所以 $S_{\Delta PAB}=\frac{1}{2}AB\cdot PQ=\frac{1}{2}\times 3\times PQ=\frac{3}{2}PQ$，又 $S_{\Delta PAB}=\frac{9\sqrt{3}}{4}$，所以 $\frac{3}{2}PQ=\frac{9\sqrt{3}}{4}$，故 $PQ=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，

在 ΔAOQ 中，$\angle AOQ=\frac{1}{2}\angle AOB=60^{\circ}$，所以 $OQ=OA\cdot\cos\angle AOQ=\frac{\sqrt{3}}{2}$，故 $OP=\sqrt{PQ^2-OQ^2}=\sqrt{6}$，

所以圆柱 PO 的体积 $V=\frac{1}{3}\pi\times(\sqrt{3})^2\times\sqrt{6}=\sqrt{6}\pi$.



3.（2023 • 重庆模拟 • ★★★）圆台上、下底面圆的圆周都在一个半径为 5 的球面上，其上、下底面圆的周长分别为 8π 和 10π，则该圆台的侧面积为（　　）

（A）$8\sqrt{10}\pi$　（B）$8\sqrt{11}\pi$　（C）$9\sqrt{10}\pi$　（D）$9\sqrt{11}\pi$

答案： C

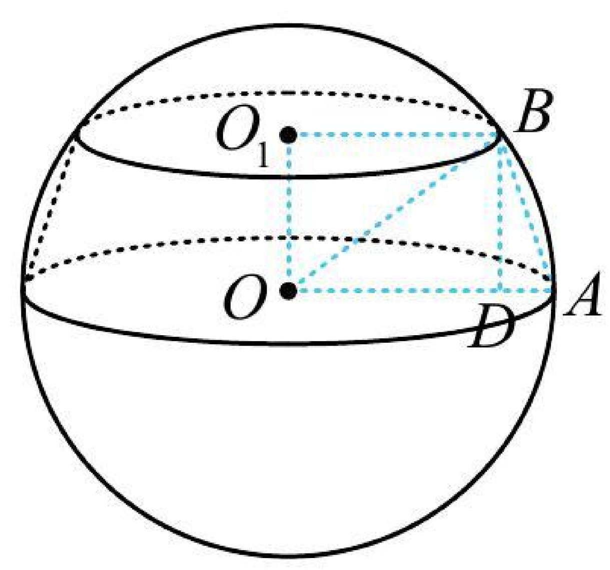
解析： 如图，圆台和球都是旋转体，到任意的过轴的截面分析均可，不妨选取图中的截面 OO_1BA 来看，

由题意，$\begin{cases}2\pi\cdot O_1B=8\pi\\2\pi\cdot OA=10\pi\end{cases}$，所以 $\begin{cases}O_1B=4\\OA=5\end{cases}$，

上下底半径有了，求圆台侧面积还差母线长 AB，

作 $BD\perp OA$ 于 D，则 $OD=O_1B=4$，$AD=OA-OD=1$，$OB=5$，$OO_1=\sqrt{OB^2-O_1B^2}=3$，

所以 $BD=3$，$AB=\sqrt{BD^2+AD^2}=\sqrt{10}$，故圆台的侧面积 $S=\pi(r_1+r_2)l=\pi\times(4+5)\times\sqrt{10}=9\sqrt{10}\pi$.



4.（2023 • 新高考 I 卷 • ★★★）在正四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=2$，$A_1B_1=1$，$AA_1=\sqrt{2}$，则该棱台的体积为_____.

答案： $\frac{7\sqrt{6}}{6}$

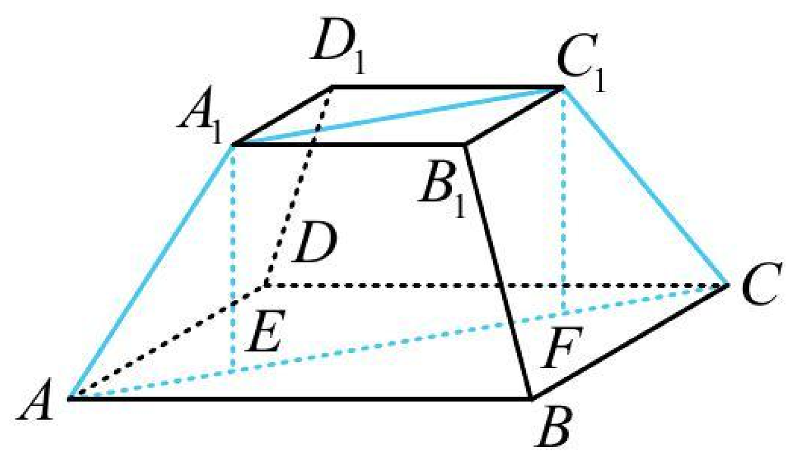
解析： 求正四棱台的体积只差高，由于知道侧棱长，故在包含高和侧棱的截面 AA_1C_1C 中来分析，

设正四棱台的高为 h，如图，作 $A_1E\perp AC$ 于点 E，$C_1F\perp AC$ 于点 F，则 $A_1E=C_1F=h$，

因为 $A_1B_1=1$，$AB=2$，所以 $EF=A_1C_1=\sqrt{2}$，$AC=2\sqrt{2}$，$AE=\frac{1}{2}(AC-EF)=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

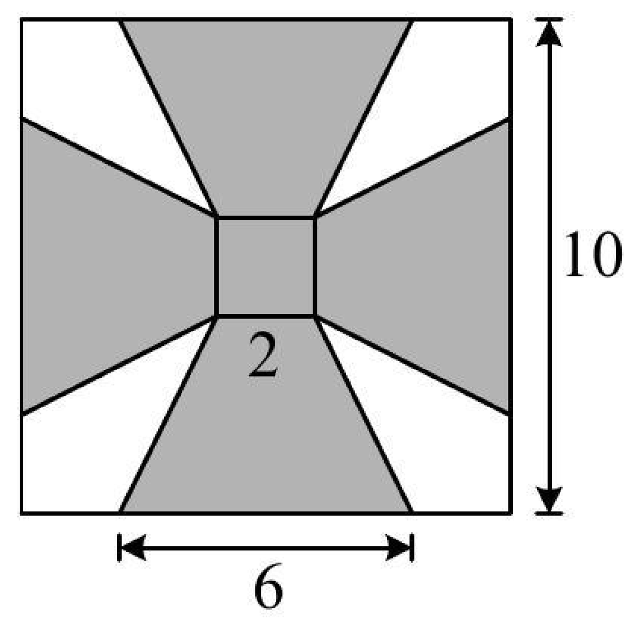
又 $AA_1=\sqrt{2}$，所以 $A_1E=\sqrt{AA_1^2-AE^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$，故 $h=\frac{\sqrt{6}}{2}$，正四棱台的上、下底面积分别为 $S'=1$，$S=4$，

所以正四棱台的体积$V=\dfrac{1}{3}(S+S'+\sqrt{SS'})h=\dfrac{7\sqrt{6}}{6}$.



5.（2023·红河州一模·★★★）如图所示是一块边长为 10cm 的正方形铝片，其中阴影部分由四个全等的等腰梯形和一个正方形组成，将阴影部分裁剪下来，并将其拼接成一个无上盖的容器（铝片厚度不计），则该容器的容积为（　　）

（A）$\dfrac{80\sqrt{3}}{3}\text{cm}^3$　（B）$\dfrac{104\sqrt{3}}{3}\text{cm}^3$　（C）$80\sqrt{3}\text{cm}^3$　（D）$104\sqrt{3}\text{cm}^3$



答案：B

解析：可以想象拼接后的容器是正四棱台，上、下底面边长分别为 2 和 6，斜高为 4，如图 1，正四棱台如图 2，

要求体积，还需算高 OG，已知斜高，故在截面 $OGIE$ 中分析，其中 I，G 分别为所在棱中点，

作 $IT\perp OE$ 于 T，则 $OT=IG=1$，$TE=OE-OT=3-1=2$，$IE=4$，

在 ΔITE 中，$IT=\sqrt{IE^2-TE^2}=2\sqrt{3}$，所以 $OG=IT=2\sqrt{3}$，

故正四棱台的体积$V=\dfrac{1}{3}\times(2\times2+6\times6+\sqrt{2\times2\times6\times6})\times2\sqrt{3}=\dfrac{104\sqrt{3}}{3}$.

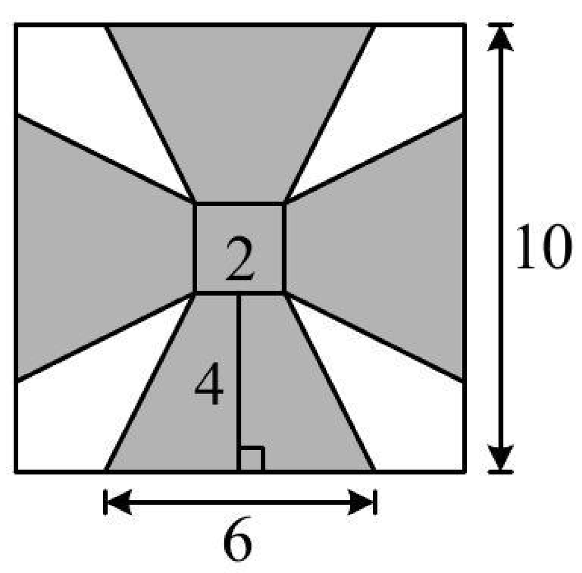


图1

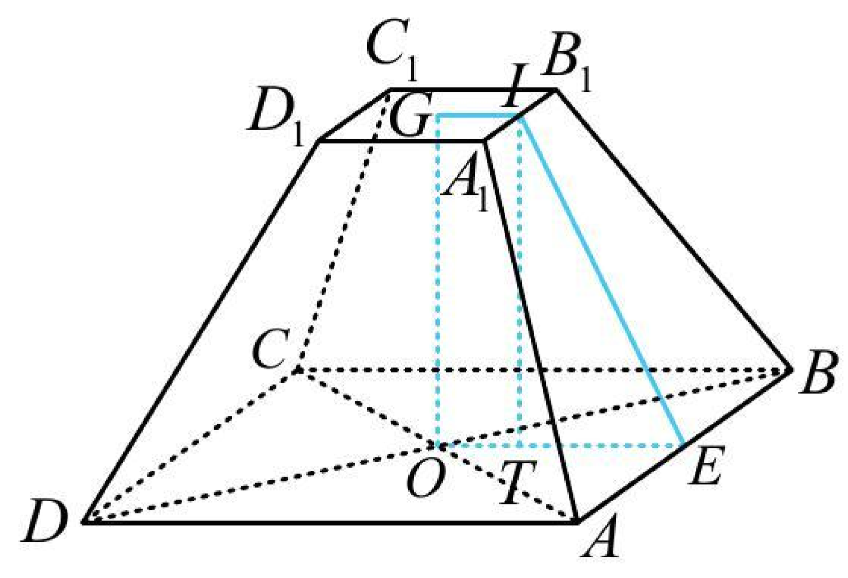
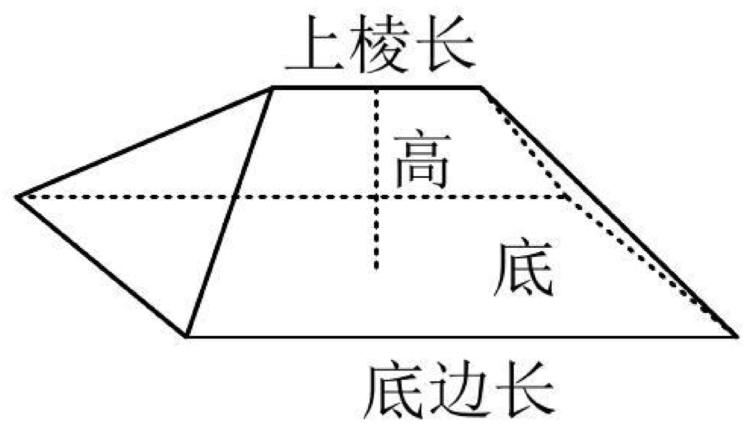


图2

6.（2022·连云港模拟·★★★）刍甍是中国古代算数中的一种几何体，其结构特征是：底面为长方形，上棱和底面平行，且长度不等于底面平行的棱长的五面体，是一个对称的楔形体，如图.



已知一个刍甍底边长为6，底边宽为4，上棱长为2，高为2，则它的表面积为（　　）

（A）$24\sqrt{2}$　　（B）$24+24\sqrt{2}$　　（C）$24+24\sqrt{5}$　　（D）$24+16\sqrt{2}+8\sqrt{5}$

答案：B

解析：如图，由题意，$AB=4$，$BB_1=6$，$CC_1=2$，$ED=2$，其中E为CC_1中点，D为底面中心，

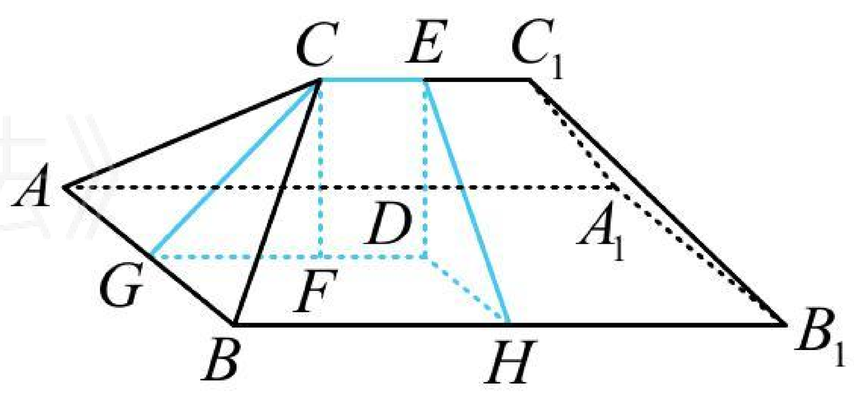
由对称性，左右三角形面积相等，前后等腰梯形面积也相等，各算一个面积即可，计算都需要各自的高，于是在包含刍甍的高以及两个斜高CG、EH的截面$CGDE$和EDH中分析，

由图可知，$DF=CE=\frac{1}{2}CC_1=1$，$DG=\frac{1}{2}BB_1=3$，$GF=DG-DF=2$，$CF=ED=2$，

所以$CG=\sqrt{CF^2+GF^2}=2\sqrt{2}$，故$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot CG=\frac{1}{2}\times 4\times 2\sqrt{2}=4\sqrt{2}$，

又$DH=\frac{1}{2}AB=2$，$EH=\sqrt{ED^2+DH^2}=2\sqrt{2}$，所以$S_{BB_1C_1C}=\frac{1}{2}(CC_1+BB_1)\cdot EH=\frac{1}{2}\times(2+6)\times 2\sqrt{2}=8\sqrt{2}$，

又底面ABB_1A_1的面积$S_{ABB_1A_1}=4\times 6=24$，故所给刍甍的表面积$S=24+2\times 4\sqrt{2}+2\times 8\sqrt{2}=24+24\sqrt{2}$.



7.（2021·新高考Ⅱ卷·★★★）北斗三号全球卫星导航系统是我国航天事业的重要成果. 卫星导航系统中，地球静止同步轨道卫星的轨道位于地球赤道所在平面，轨道高度为36000km（轨道高度指卫星到地球表面的最短距离），把地球看成一个球心为O，半径r为6400km的球，其上点A的纬度是指OA与赤道所在平面所成角的度数，地球表面能直接观测到一颗地球静止同步轨道卫星的点的纬度的最大值记为α，该卫星信号覆盖的地球表面面积$S=2\pi r^2(1-\cos\alpha)$，（单位：km^2），则S占地球表面积的百分比为（　　）

（A）26%　　（B）34%　　（C）42%　　（D）50%

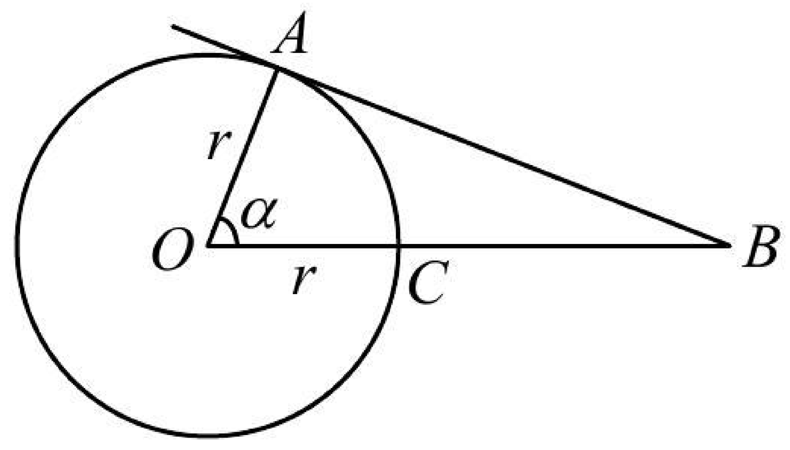
答案：C

解析：读完题发现要求的百分比是$\frac{2\pi r^2(1-\cos\alpha)}{4\pi r^2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}$，所以只需求$\alpha$，可画剖面图来看，

如图，同步卫星位于点B处，点A是地球上能观测到该同步卫星的纬度最大的点，其中AB与圆O相切，则$\angle AOB=\alpha$且$OA\perp AB$，设线段OB与球O表面交于点C，则$OC=r=6400$，$BC=36000$，

所以$\cos\alpha=\frac{OA}{OB}=\frac{6400}{6400+36000}\approx 0.151$，从而$\frac{1-\cos\alpha}{2}\approx\frac{1-0.151}{2}=0.4245\approx 0.42$，

故S占地球表面积的百分比为42%.



8．（★★★★）中国有悠久的金石文化，印信是金石文化的代表之一. 印信的形状多为长方体、正方体或圆柱体，但南北朝时期的官员独孤信的印信形状是“半正多面体”（图 1）. 半正多面体是由两种或两种以上的正多边形围成的多面体. 半正多面体体现了数学的对称美. 图 2 是一个棱数为 48 的半正多面体，它的所有顶点都在同一个正方体的表面上，且此正方体的棱长为 1. 则该半正多面体共有_____个面，其棱长为_____.

图1

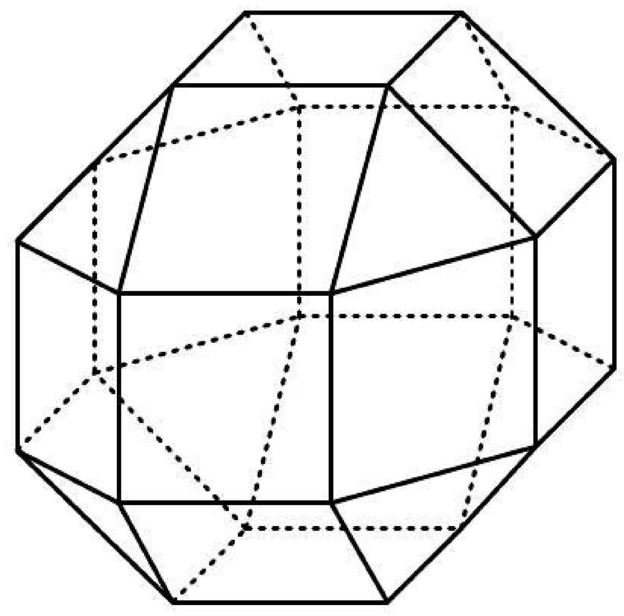


图2

答案：26，$\sqrt{2}-1$

解析：从上到下按层数，可得该多面体的面数为$1+8+8+8+1=26$；

图形较复杂，计算的关键是抓截面，要求的是半正多面体的棱长，故考虑找一个包含该棱长的截面，为了方便阐释，在图中标几个点，如图 1，并将这些点所在的截面单独画出来，如图 2，

该截面是正八边形，由正方体的棱长为 1 可得 $AE=1$，设半正多面体的棱长为 a，即正八边形的边长为 a，

接下来可把 AE 用 a 表示，从而建立方程求 a，可拆分成 AC，CF，EF 三段分别计算，

由对称性知 ΔABC 为等腰直角三角形，所以 $AC=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$，同理，$EF=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$，

又 $CF=BG=a$，所以 $AE=AC+CF+EF=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a+a+\dfrac{\sqrt{2}}{2}a=1$，解得：$a=\sqrt{2}-1$.

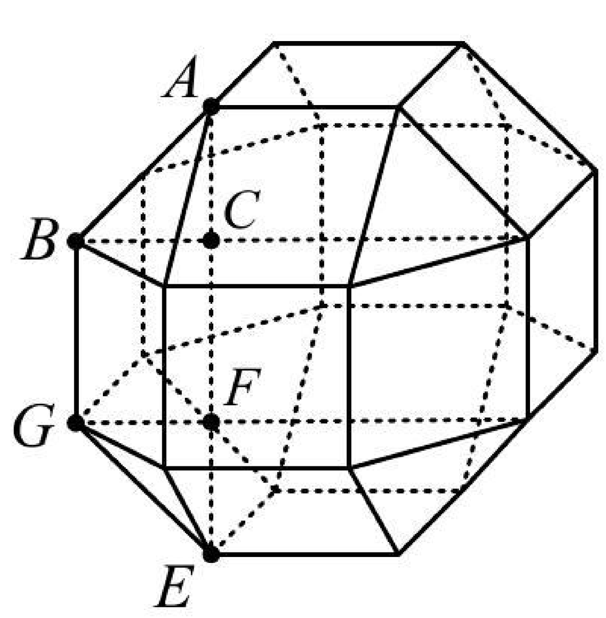


图1

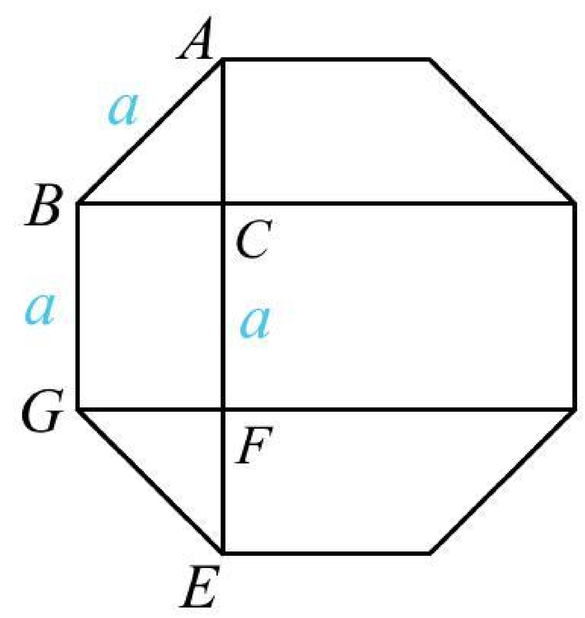
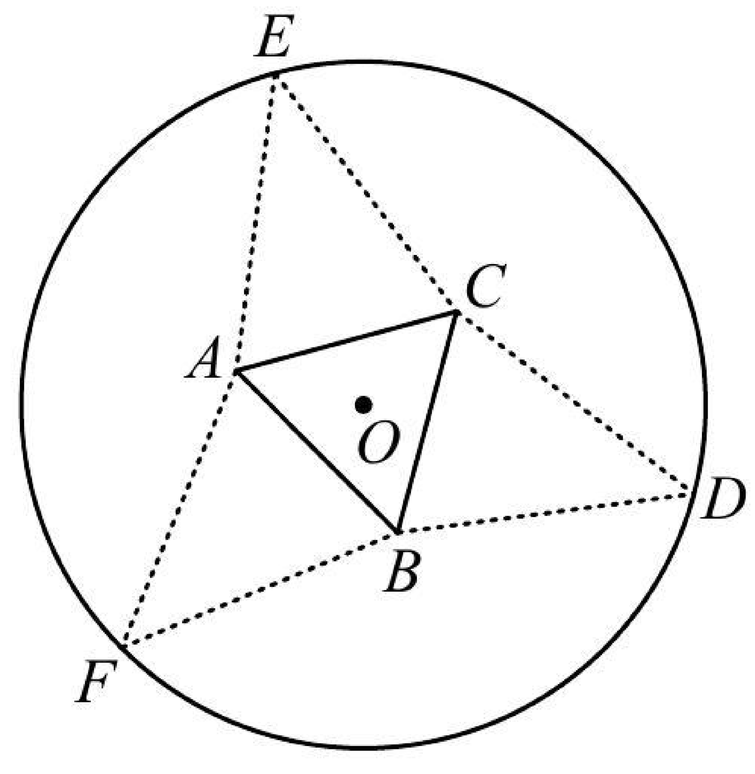


图2

9．（★★★★）如图，圆形纸片的圆心为 O，半径为 5cm，该纸片上的等边三角形 ABC 的中心为 O. D，E，F 为圆 O 上的点，ΔDBC，ΔECA，ΔFAB 分别是以 BC，CA，AB 为底边的等腰三角形. 沿虚线剪开后，分别以 BC，CA，AB 为折痕折起 ΔDBC，ΔECA，ΔFAB，使得 D，E，F 重合，得到三棱锥. 当 ΔABC 的边长变化时，所得三棱锥体积（单位：cm^3）的最大值为.



答案： $4\sqrt{15}$

解析： 折起后的图形是正三棱锥，注意到图 2 中的 $PM+OM$ 等于图 1 中的 OE，为定值，故到截面 POM 中分析，不妨设 OM 为变量，则 OP 也能用 OM 表示，从而把 V_{P-ABC} 表示成关于 OM 的单变量函数，

在图 1 中，设 $OM=x$，则 $EM=5-x$，

因为 $AB\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{3}=OM$，所以 $AB=2\sqrt{3}x$，

故在图 2 中，$PM=5-x$，$OM=x$，

由 $PM>OM$ 可得 $5-x>x$，所以 $0<x<\frac{5}{2}$，

因为 $PO\perp$ 平面 ABC，所以 $PO\perp OM$，

从而 $PO=\sqrt{PM^2-OM^2}=\sqrt{(5-x)^2-x^2}=\sqrt{25-10x}$，

故 $V_{P-ABC}=\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}\cdot PO=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times(2\sqrt{3}x)^2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{25-10x}$

$=\sqrt{(75-30x)x^4}$，

要求 V_{P-ABC} 的最大值，可将根号内的部分单独拿出来，构造函数求导分析，

设 $f(x)=(75-30x)x^4(0<x<\frac{5}{2})$，

则 $f'(x)=-30x^4+(75-30x)\cdot 4x^3=150x^3(2-x)$，

所以 $f'(x)>0\Leftrightarrow 0<x<2$，$f'(x)<0\Leftrightarrow 2<x<\frac{5}{2}$，

从而 $f(x)$ 在 $(0,2)$ 上↗，在 $(2,\frac{5}{2})$ 上↘，

故 $f(x)_{\max}=f(2)=240$，所以 $(V_{P-ABC})_{\max}=4\sqrt{15}$.

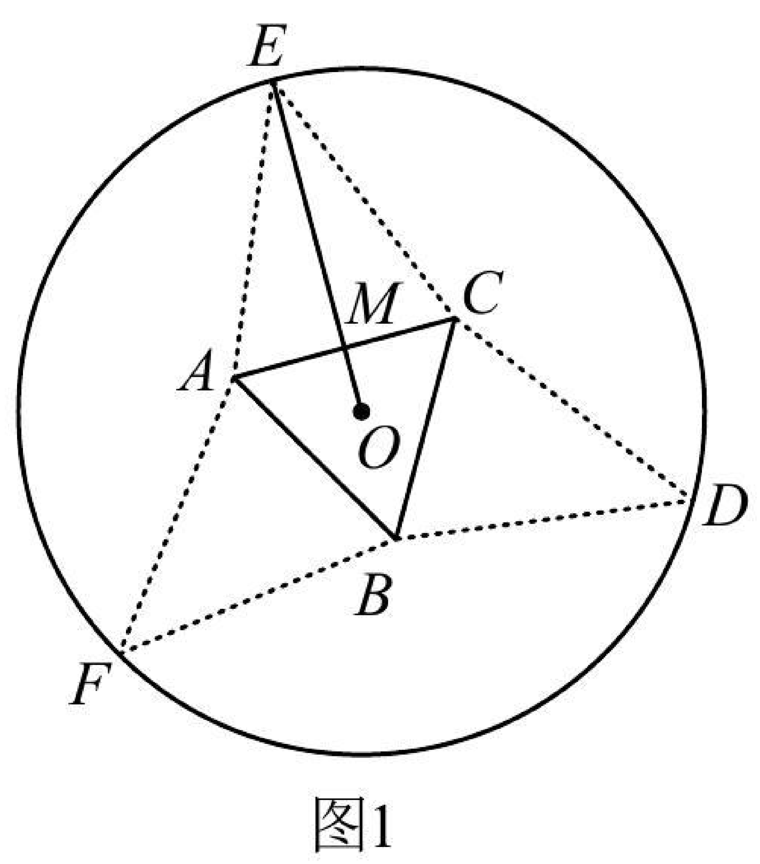


图1

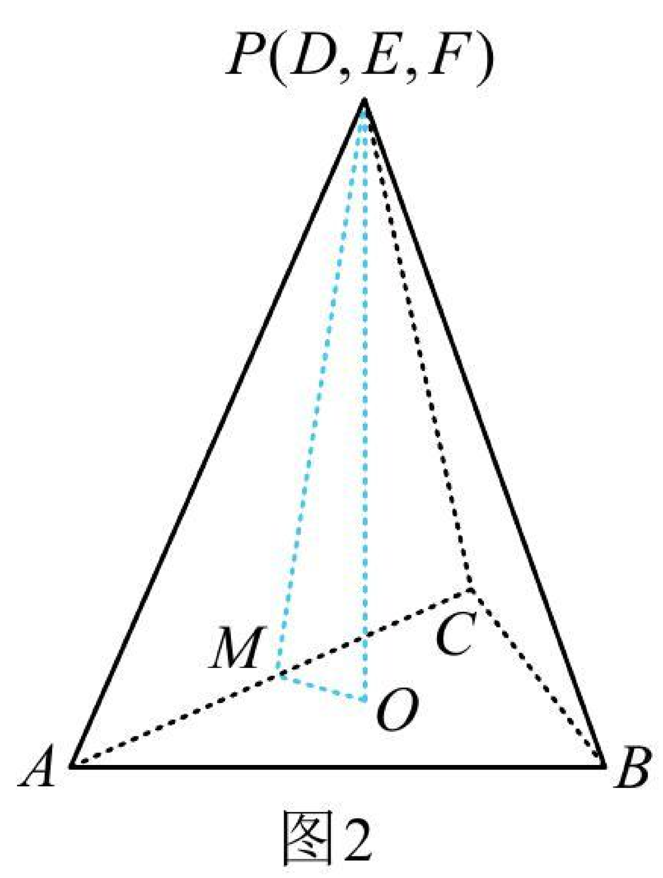


图2

类型Ⅱ：内切球问题

10.（2023·山东潍坊模拟·★★★）已知圆锥的底面半径为2，高为$4\sqrt{2}$，则该圆锥内切球的表面积为（　　）

（A）4π　　（B）8π　　（C）16π　　（D）32π

答案：B

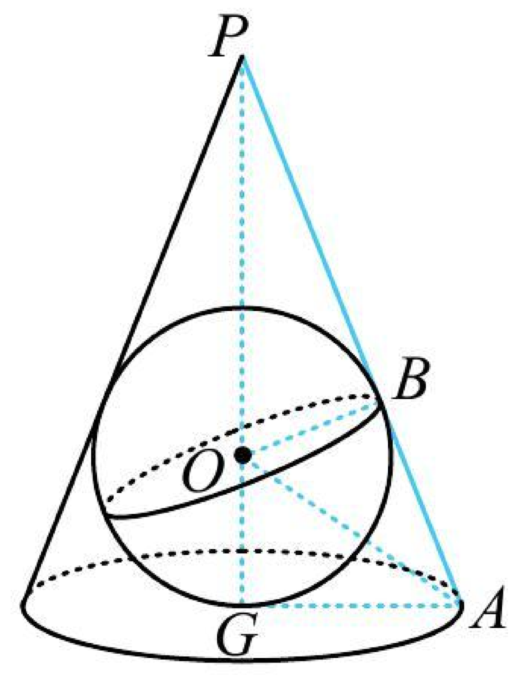
解析：由于球和圆锥都是旋转体，分析过轴的任意截面都行，不妨到截面PGA中考虑，

如图，设球心为O，半径为R，则$OB=OG=R$，由切线长相等可知，$AB=AG=2$，

由题意，$PG=4\sqrt{2}$，$PA=\sqrt{PG^2+AG^2}=6$，所以$OP=4\sqrt{2}-R$，$PB=PA-AB=4$，

在ΔPOB中，由$OB^2+PB^2=OP^2$可得$R^2+16=(4\sqrt{2}-R)^2$，解得：$R=\sqrt{2}$，

所以该圆锥内切球的表面积$S=4\pi R^2=8\pi$.



11.（2023·江西模拟·★★★）在$\mathrm{Rt}\Delta ABC$中，$CA=1$，$CB=2$，以斜边AB为旋转轴旋转一周得到一个几何体，则该几何体的内切球的体积为（　　）

（A）$\dfrac{\sqrt{2}\pi}{3}$　　（B）$\dfrac{8\sqrt{2}\pi}{3}$　　（C）$\dfrac{32\pi}{81}$　　（D）$\dfrac{4\pi}{81}$

答案：C

解析：由题意，ΔABC绕AB旋转一周所得的旋转体是如图1所示的两个有公共底面的圆锥，

由于球和圆锥都是旋转体，分析过轴的任意截面都行，不妨到截面$ACBD$中考虑，

如图2，设切点分别为M，N，内切球半径为R，则$ON\perp BC$，$OM\perp AC$，$OM=ON=R$，

结合$AC\perp BC$可得四边形$CMON$是正方形，故$CN=OM=R$，$BN=BC-CN=2-R$，

要求R，需建立方程，可由相似比来建立，

因为$ON//AC$，所以$\dfrac{ON}{AC}=\dfrac{BN}{BC}$，即$\dfrac{R}{1}=\dfrac{2-R}{2}$，解得：$R=\dfrac{2}{3}$，

故所求内切球的体积$V=\dfrac{4}{3}\pi R^3=\dfrac{4}{3}\pi\times\dfrac{8}{27}=\dfrac{32\pi}{81}$.

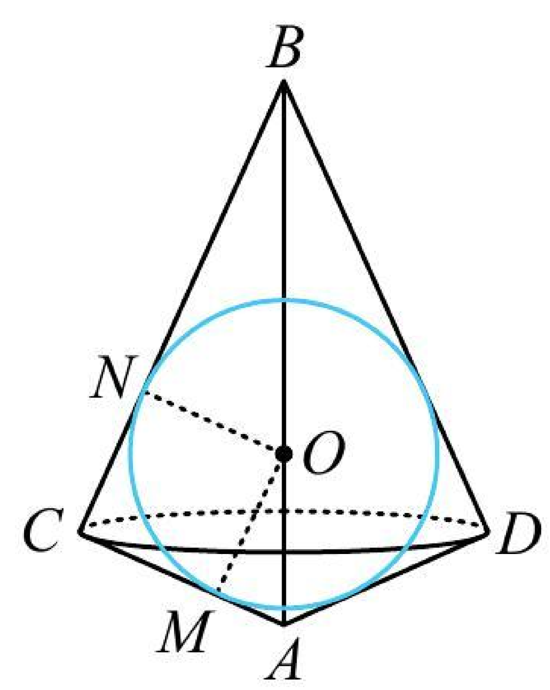


图1

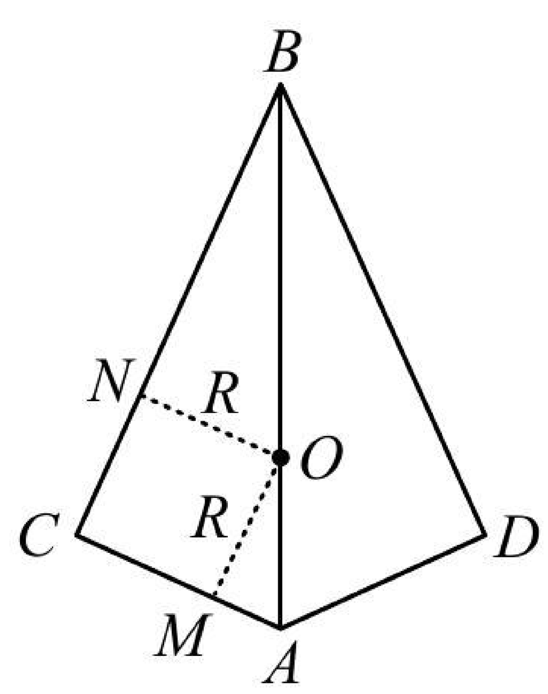


图2

12．（2022 • 厦门模拟 • ★★★★）已知正三棱锥$V-ABC$中，侧面与底面所成的二面角的正切值为$\sqrt{2}$，$AB=6$，则这个三棱锥的内切球半径为_____.

答案：$\dfrac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$

解析： 因为是正三棱锥的内切球，所以关键是分析包含切点和高的截面，如图 1 中的截面 VCD，

在图 1 中，D 为 AB 中点，E 为球面与侧面 VAB 的切点，F 是球面与底面的切点，则 $AB\perp VD$，$AB\perp CD$，

所以$\angle VDC$是侧面与底面所成的二面角的平面角，由题意，$\tan\angle VDC=\dfrac{VF}{DF}=\sqrt{2}$ ①，

因为 $AB=6$，所以 $DF=\dfrac{1}{3}CD=\dfrac{1}{3}\times 6\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$，代入①得：$VF=\sqrt{6}$，所以 $VD=\sqrt{DF^2+VF^2}=3$，

把截面 VCD 单独画出来，如图 2，设内切球 O 的半径为 R，则 $OE=OF=R$，$VO=VF-OF=\sqrt{6}-R$，

由$\Delta VEO\backsim\Delta VFD$可得$\dfrac{OE}{DF}=\dfrac{VO}{VD}$，即$\dfrac{R}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{6}-R}{3}$，解得：$R=\dfrac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$.

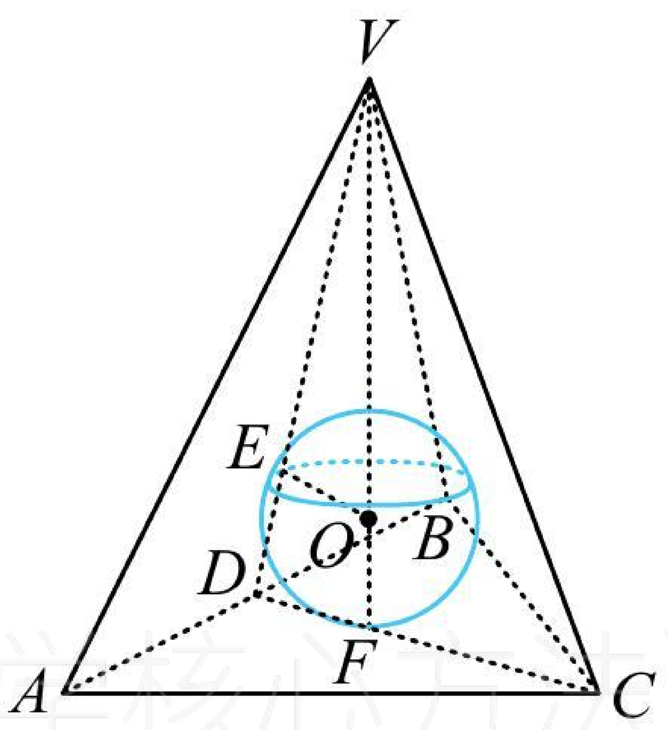


图1

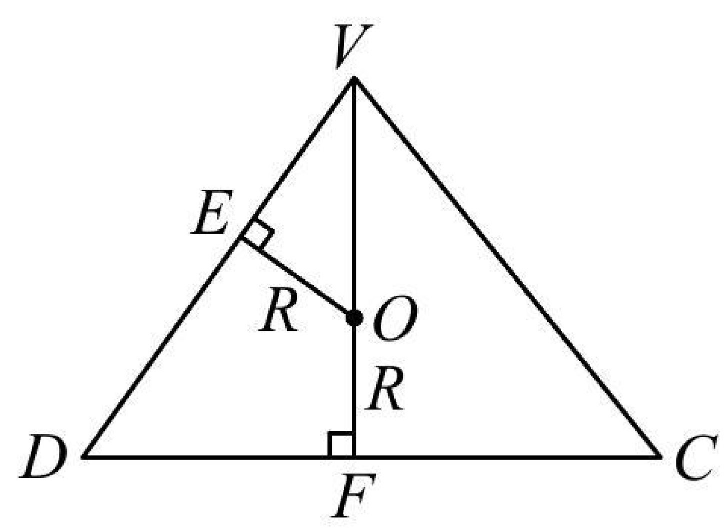


图2